

Diego Armando Becerra Iñiguez

EV1\_2 calculo de masa centro de masa y el tensor de la inercia de cuerpos rígidos

**Centro de masa**

El concepto de centro de masa es útil para describir el movimiento de objetos o de sistemas de partículas. Dicho centro de masa representa el movimiento de todo el cuerpo o sistema de partículas. Cuando el cuerpo es homogéneo y tiene simetría entonces el centro de masa coincide con su centro de simetría.

1. Si existen n partículas con masas m1, m2, . . . mn respectivamente el centro de masa se define:
2. Para el caso de un cuerpo continuo:

Desde el punto de vista de una notación vectorial:

Por lo tanto:

Movimiento del centro de masa partiendo del caso discreto.

Derivando ambos lados de la igualdad con respecto al tiempo, resulta:

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo, resulta:

Por lo tanto:

Es decir:

La masa total del sistema de partículas está concentrada en el centro de masa y se considera que la suma de fuerzas externas se aplica en dicho punto.

El tensor de inercia de un cuerpo rígido.

**Tensor de inercia de un cuerpo rígido.**

**Introducción**

El tensor de inercia de un sólido rígido caracteriza la relación entre el momento cinético del sólido respecto a un punto y su vector rotación. Su carácter tensorial se debe a que tanto el momento cinético como el vector rotación son magnitudes vectoriales.

**Momento de inercia respecto a un eje**

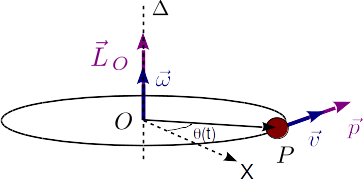
Para una partícula de masa *m*, situada en el punto *P* y con velocidad  , su momento cinético respecto a un punto *O* es:

Supongamos una partícula *m* que describe una circunferencia de radio R en torno al origen con velocidad angular \vec{\omega}. Su velocidad es:

pues los vectores  y  son perpendiculares. Por tanto, el momento cinético de esta partícula respecto al centro de la circunferencia es perpendicular al plano de ésta y de módulo

con dirección perpendicular al plano de la circunferencia y sentido dado por la regla de la mano derecha. Puesto que en este caso el momento cinético tiene la misma dirección y sentido que la velocidad angular, podemos escribir esta expresión en forma vectorial

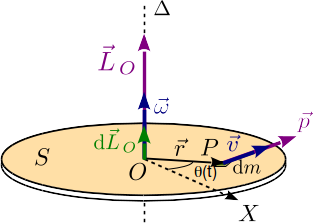
Esta relación entre los vectores rotación y momento cinético es similar a la que existe entre la velocidad y la cantidad de movimiento, \vec{p}=m\vec{v}. El escalar que multiplica al vector rotación, *mR*2, es una medida de la inercia de la partícula respecto al movimiento de rotación. Recibe el nombre de **momento de inercia de la partícula respecto al eje Δ**. El momento de inercia relaciona una magnitud cinemática, \vec{\omega} con una magnitud cinética, \vec{L}_O.



Para un sistema de partículas (por ejemplo, un sólido rígido) el momento cinético del sistema respecto de un punto es la suma de los momentos cinéticos de cada una de las partículas que componen el sistema. Supongamos que tenemos un disco que rota con vector rotación \vec{\omega} respecto a un eje perpendicular a él que pasa por su centro.

Cada elemento de superficie del disco, de masa *dm*, realiza un movimiento circular de radio *r* y con velocidad

Igual que para la partícula anterior, el momento cinético respecto al centro de disco del elemento de área es

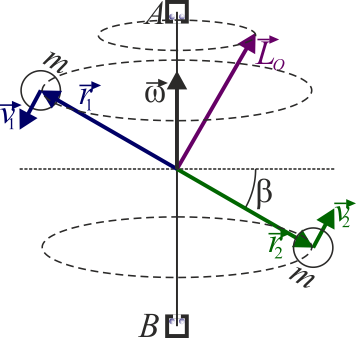


El momento cinético del disco es la suma de los momentos cinéticos de todos los elementos de área que se pueden considerar en el disco. Como es un sistema continuo la suma se convierte en integral

Hemos usado que el vector rotación es el mismo en todos los puntos del sólido (es el invariante vectorial), y lo sacamos de factor común de la integral. La cantidad entre paréntesis es el momento de inercia del disco respecto al eje Δ

Vemos que en este caso se cumple

Es decir, los vectores momento cinético y rotación son paralelos. En este caso esto ocurre porque el eje de rotación es un eje de simetría del sólido. Si este no es el caso los vectores rotación y momento angular no son paralelos. Un ejemplo sencillo donde el momento cinético no es paralelo a la velocidad angular es el de un rotor desequilibrado.



En estas situaciones todavía existe una relación lineal entre el momento cinético y el vector rotación. Pero para ello, el momento de inercia respecto a un eje, que es una magnitud escalar, se ve sustituida por el **Tensor de Inercia** (o Matriz de Inercia), \overset{\leftrightarrow}{I}_O. Esta es una magnitud tensorial, de modo que podemos escribir